Análisis Funcional – Evaluación 2. Soluciones

Ejercicio 1. a) Prueba que el conjunto $P = \{x \in c_0 : |x(n)| < 1\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ es abierto en c_0.

b) ¿Es abierto en ℓ_∞ el conjunto $P = \{x \in \ell_\infty : |x(n)| < 1\ \forall n \in \mathbb{N}\}$?

Sugerencia. Para el punto a) puede ser útil probar que si $x \in c_0$ entonces se verifica que $\|x\|_\infty = \text{máx}\,\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$.

Solución. a) Sea $x \in c_0$, $x \neq 0$. Puesto que $\text{lím}\,\{x(n)\} = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ se verifica que $|x(n)| < \frac{1}{2}\|x\|_\infty$. Sea $|x(q)| = \text{máx}\,\{|x(k)| : 1 \leqslant k \leqslant n_0\}$. Por definición de supremo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2}\|x\|_\infty < |x(m)|$, y debe ser $m \leqslant n_0$. Por tanto, para todo $n > n_0$ se verifica que $|x(n)| < \frac{1}{2}\|x\|_\infty < |x(m)| \leqslant |x(q)|$, lo que prueba que $|x(q)| = \text{máx}\,\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$. Por tanto $\|x\|_\infty = \text{máx}\,\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$.

Deducimos que si $x \in c_0$ entonces

$$\|x\|_\infty < 1 \iff \text{máx}\,\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < 1 \iff |x(n)| < 1\ \forall n \in \mathbb{N}$$

y por tanto

$$P = \{x \in c_0 : |x(n)| < 1\ \forall n \in \mathbb{N}\} = \{x \in c_0 : \|x\|_\infty < 1\} = B(0,1)$$

es la bola abierta unidad en c_0 y, en consecuencia, es un conjunto abierto.

b) Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ la sucesión dada para todo $n \in \mathbb{N}$ por $\varphi(n) = 1 - \frac{1}{n}$. Puesto que para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \varphi(n) < 1$, tenemos que $\varphi \in P$. Dado un número $\varepsilon > 0$ consideremos un número natural $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ y definamos $z = \varphi + \frac{1}{n_0}\,\mathrm{e}_{n_0}$ donde e_{n_0} es el vector unidad $\mathrm{e}_{n_0}(k) = 0$ si $k \neq n_0$ y $\mathrm{e}_{n_0}(n_0) = 1$. Tenemos que $\|\varphi - z\|_\infty = \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ por lo que $z \in B(\varphi, \varepsilon)$, pero $z(n_0) = \varphi(n_0) + \frac{1}{n_0} = 1$, luego $z \notin P$. Por tanto, φ no es un punto interior de P y P no es abierto. ☺

Una variante para el punto a) puede ser la siguiente. Sea $x \in c_0$, $x \neq 0$, y sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $|x(p)| > 0$. Puesto que $\text{lím}\,\{x(n)\} = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ se verifica que $|x(n)| < |x(p)|$. Es claro que debe ser $n_0 \geqslant p$. Sea $|x(q)| = \text{máx}\,\{|x(k)| : 1 \leqslant k \leqslant n_0\}$. Como $|x(q)| \geqslant |x(p)|$ deducimos que $|x(q)| = \text{máx}\,\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$.

Comentarios. Sorprende que muchos dan como evidente que $\|x\|_\infty = \text{máx}\,\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$ a pesar de que en la sugerencia se indica ***probar*** dicha igualdad. Tengo la impresión de que para algunos un supremo es lo mismo que un máximo. Sin embargo, esos mismos, una vez visto que (algo para ellos evidente) $P = B(0,1)$, se dedican a probar que $B(0,1)$ es abierto. Hay cosas que son bien sabidas, y una de ellas es que las bolas abiertas son conjuntos abiertos, es algo que no precisa ser probado. Peor todavía, incluso eso muchos lo hacen mal porque escriben una desigualdad no estricta donde deben escribir una desigualdad estricta, parece que consideran que da igual, o sea, que no conceden importancia a esas minucias. Pues tales detalles son importantes, hay que distinguir perfectamente cuándo se puede usar una desigualdad no estricta y cuándo debe usarse una desigualdad estricta, eso debería ser bien sabido por todos.

Un error frecuente es razonar por contradicción como sigue: Suponen que $x \in c_0$ y que no existe el máximo; entonces, dicen, no existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x(n)| < |x(n_0)|$ para todo $n \geqslant n_0$, y por tanto la sucesión $x \notin c_0$ ¡contradicción! Me pregunto ¿dónde está la contradicción? ¿Qué tiene que ver no tener máximo el conjunto $\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$ con la no existencia de un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x(n)| < |x(n_0)|$ para todo $n \geqslant n_0$? Que el conjunto $\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$ no tenga máximo significa que para cada $n \in \mathbb{N}$ hay un $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x(n)| < |x(m)|$. Eso debe llevar a contradicción con la suposición de que $x \in c_0$ pero no es fácil ese camino. Si te empeñas en seguirlo, lo primero es justificar que debe haber algún $m > n$ tal que $|x(n)| < |x(m)|$, pues en caso contrario debería ocurrir que $|x(k)| \leqslant |x(n)|$ para todo $k > n$, y entonces el máximo del conjunto $\{|x(j)| : 1 \leqslant j \leqslant n\}$ sería el máximo de $\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$, pero como estamos suponiendo que ese conjunto no tiene máximo, eso no puede ocurrir. Luego para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $m > n$ tal que $|x(n)| < |x(m)|$. A partir de aquí, puede probarse la existencia de una sucesión parcial estrictamente creciente de $\{|x(n)|\}$ y eso contradice que $x\in c_0$. Quienes han tratado de razonar por contradicción la existencia del máximo ni siquiera sospechan las dificultades que conlleva esa forma de razonar.

Otro error consiste en decir: Como $\lim \{x(n)\} = 0$, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $|x(n)| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Y de aquí deducen que el máximo del conjunto $\{|x(n)| : 1 \leqslant n \leqslant n_0\}$ es el máximo de $\{|x(n)| : n\in\mathbb{N}\}$. Pues eso depende del valor de ε. Para razonar así tenemos que asegurarnos de que hay algún $x(k)$ tal que $\varepsilon \leqslant |x(k)|$.

En el punto b) casi todos consideráis la sucesión φ y tratáis de probar que no hay ninguna bola $B(\varphi,\varepsilon)$ que esté contenida en P. El problema es que muchos no explicáis absolutamente nada de lo que hacéis, simplemente lo dais por evidente. Pues no, hay que explicar lo que se hace, máxime cuando se trata de algo tan sencillo.

Errores que considero importantes: confundir números con sucesiones, eso hace quien escribe cosas como $x(n)\in\ell_\infty$; o quien considera en ℓ_∞ la bola $B(1-\frac{1}{n},\varepsilon)$.

Ejercicio 2. Representaremos por $C^1[a,b]$ el espacio de las funciones reales con primera derivada continua en $[a,b]$.

a) Prueba que $(C^1[a,b], \|\ \|_\infty)$ no es completo.

b) Para $f\in C^1[a,b]$ definimos

$$\|f\|^1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

Prueba que con dicha norma $C^1[a,b]$ es un espacio de Banach separable.

Sugerencias. Deberás usar el teorema de conservación de la derivabilidad por convergencia uniforme, pero para funciones con primera derivada continua dicho teorema tiene una demostración inmediata. También necesitarás usar un resultado debido a Weierstrass que prueba que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es límite uniforme en dicho intervalo de una sucesión de funciones polinómicas.

Solución. a) Consideraremos $(C^1[a,b], \|\ \|_\infty)$ como subespacio de $(C[a,b], \|\ \|_\infty)$. Sea $\mathcal{P}[a,b]$ el espacio de las funciones polinómicas en el intervalo $[a,b]$. El teorema de Weierstrass puede expresarse en la forma $\overline{\mathcal{P}[a,b]}^{\|\ \|_\infty} = C[a,b]$. Puesto que $\mathcal{P}([a,b]) \subset C^1[a,b]$, tenemos que

$$C[a,b] = \overline{\mathcal{P}[a,b]}^{\|\ \|_\infty} \subset \overline{C^1[a,b]}^{\|\ \|_\infty} \subset C[a,b]$$

Luego $\overline{C^1[a,b]}^{\|\ \|_\infty} = C[a,b]$. Por tanto $C^1[a,b]$ no es cerrado en $(C[a,b], \|\ \|_\infty)$ y, en consecuencia, el espacio $(C^1[a,b], \|\ \|_\infty)$ no es completo.

b) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(C^1[a,b], \|\ \|^1)$. Como $\|f_n - f_m\|_\infty \leqslant \|f_n - f_m\|^1$ y $\|f_n' - f_m'\|_\infty \leqslant \|f_n - f_m\|^1$, deducimos que $\{f_n\}$ y $\{f_n'\}$ son sucesiones de Cauchy en $(C[a,b], \|\ \|_\infty)$ y, puesto que dicho espacio es completo, existen funciones $f, g \in C[a,b]$ tales que $\{f_n\} \overset{\|\ \|_\infty}{\longrightarrow} f$ y $\{f_n'\} \overset{\|\ \|_\infty}{\longrightarrow} g$. En estas condiciones, el teorema de conservación de la derivabilidad por convergencia uniforme nos dice que f es derivable y $f' = g$, luego $f\in C^1[a,b]$. Puesto que

$$\|f_n - f\|^1 = \|f_n - f\|_\infty + \|f_n' - f'\|_\infty$$

Deducimos que $\|f_n - f\|^1 \to 0$, es decir $\{f_n\} \overset{\|\ \|^1}{\longrightarrow} f$, lo que prueba que $(C^1[a,b], \|\ \|^1)$ es completo.

Para probar que el espacio $(C^1[a,b], \|\ \|^1)$ es separable probaremos que $\mathcal{P}[a,b]$ es denso en dicho espacio. Sean $f\in C^1[a,b]$ y $\varepsilon > 0$. Por el teorema de aproximación de Weierstrass, dado $\delta > 0$, existe $\varphi\in\mathcal{P}[a,b]$ tal que $\|f' - \varphi\|_\infty < \delta$. Definamos $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$\psi(x) = \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t + f(a) \qquad (x \in [a,b])$$

Tenemos que $\psi \in \mathcal{P}[a,b]$. Para todo $x \in [a,b]$ se verifica que:

$$|f(x)-\psi(x)| = \left| f(x) - f(a) - \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^x |f'(t)-\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f'(t)-\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \|f'-\varphi\|_\infty\,\mathrm{d}t = (b-a)\|f'-\varphi\|_\infty$$

Deducimos que $\|f-\psi\|_\infty \leqslant (b-a)\|f'-\varphi\|_\infty < (b-a)\delta$. Como $\psi'(x)=\varphi(x)$, tenemos que:

$$\|f-\psi\|^1 = \|f-\psi\|_\infty + \|f'-\varphi\|_\infty < \delta(1+(b-a))$$

Tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{1+b-a}$ tenemos que $\|f-\psi\|^1 < \varepsilon$. Luego $B(f,\varepsilon)\cap\mathcal{P}[a,b] \neq \emptyset$. Hemos probado que $\mathcal{P}[a,b]$ es denso en $(C^1[a,b], \|\ \|^1)$, y como $\mathcal{P}[a,b]$ es un espacio de dimensión numerable, concluimos que $(C^1[a,b], \|\ \|^1)$ es separable. ☺

Una variante para el punto a) puede ser la siguiente. Consideraremos $(C^1[a,b], \|\ \|_\infty)$ como subespacio de $(C[a,b], \|\ \|_\infty)$. Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $f_n : [a,b]\to\mathbb{R}$ la función dada por $f_n(x) = \sqrt{(x-c)^2+\frac{1}{n}}$ donde $c = \frac{a+b}{2}$, y sea $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = |x-c|$. Tenemos que

$$|f_n(x)-f(x)| = \sqrt{(x-c)^2+\frac{1}{n}} - \sqrt{(x-c)^2} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{(x-c)^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{(x-c)^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Deducimos que $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, y por tanto $\{f_n\} \xrightarrow{\|\ \|_\infty} f$. Puesto que $f_n\in C^1[a,b]$ y $f\notin C^1[a,b]$, deducimos que $C^1[a,b]$ no es un subespacio cerrado de $C[a,b]$ y por tanto no es completo.

Una variante para el punto b) es usar sucesiones. De ambas formas es correcto. A mi me gusta más como lo he hecho arriba.

Comentarios. En el punto a) casi todos hacéis la variante anterior considerando el intervalo $[0,1]$ y las funciones $f_n(x) = \sqrt{x+\frac{1}{n}}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Llama la atención el trabajo que os cuesta probar la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n\}$ ¡hasta usáis derivadas!. Muchos afirmáis que la derivada $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(0 < x \leqslant 1)$ no es continua en 0. Debería estar claro que para que una función sea continua o discontinua en un punto tiene que estar definida en dicho punto, porque si no lo está ¿cómo comprobar que es continua o que no lo es? Por eso no tiene sentido decir que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ es discontinua en 0 ¡no está definida en 0!. Lo que hay que decir es que f no es derivable en 0.

Por cierto, es fácil comprobar que los espacios $(C[a,b], \|\ \|_\infty)$ y $(C[0,1], \|\ \|_\infty)$ son isométricamente isomorfos. Pruébalo.

También me ha llamado la atención la afirmación de que $(C^1[a,b], \|\ \|_\infty)$ *no es cerrado* sin decir seguidamente dónde no es cerrado. Los conceptos de *cerrado* y *abierto* aplicados a un conjunto son **relativos** al espacio topológico donde dicho conjunto se considera. Salvo que se haya indicado con claridad el espacio topológico ambiente en el que se trabaja, dichos conceptos tiene que ser precisados.

Un razonamiento que se repite es el siguiente: $(C^1[a,b], \|\ \|_\infty)$ no es cerrado, *y como* $(C[a,b], \|\ \|_\infty)$ *es completo,* se sigue que $(C^1[a,b], \|\ \|_\infty)$ no es completo. Quien razona así puede que necesite repasar las relaciones entre *cerrado* y *completo*. Si M es un subespacio no cerrado de un espacio normado X (completo o no) entonces M no es completo.

Por cierto los espacios $(C[a,b], \|\ \|^1)$ y $(C[0,1], \|\ \|^1)$ son topológicamente isomorfos. Pruébalo.

Hay errores en la notación ¡no será porque yo no lo advertí! como, por ejemplo $\|f_n(x)-f(x)\|_\infty$. La norma uniforme o del supremo (no la llaméis con el feo nombre de *norma infinito*) trabaja sobre funciones no sobre números, y $f_n(x)$ y $f(x)$ son números no funciones. Es importante distinguir entre una función f y uno de sus valores $f(x)$ porque no son lo mismo. Concedo mucha importancia a estas cosas porque creo que quien no hace estas distinciones y todo le parece lo mismo demuestra una gran confusión.

En el punto b) hay muchos que han copiado de algún texto. Con la ayuda de Google puedes encontrar casi cualquier cosa en Internet; por ejemplo, la solución de algún ejercicio que tienes que entregar. No me parece mal ni bien que se use Internet para esos fines, pero lo que no entiendo es que si se copia se copie mal y sin entender lo que se copia. En este apartado muchos consideran el subconjunto (que no es un subespacio) de las funciones polinómicas con coeficientes racionales, algunos incluso solamente consideran funciones polinómicas ¡de grado uno!, y prueban, más mal que bien, que este conjunto es denso en $(C^1[a,b], \| \|^1)$. ¿Para qué se necesita que los coeficientes sean racionales? Para nada. En los apuntes hay un resultado que dice que un espacio normado es separable si, y sólo si, contiene un subespacio denso de dimensión numerable. El espacio $\mathcal{P}[a,b]$ es de dimensión numerable ¿para qué complicarse considerando funciones polinómicas con coeficientes racionales? Respuesta: porque así estaba hecho en el texto del que se ha copiado. En dicho texto, estoy seguro, también se consideraba el espacio de las funciones con derivada continua de orden k y, claro está, quienes copian sin pensar lo que copian, no se toman el trabajo de traducir lo que allí se dice para el caso de funciones con derivada primera continua, que es de lo que trata este ejercicio, sino que generalizan sin necesidad y de forma muy confusa. En fin, se puede aprender mucho copiando siempre que se haga un esfuerzo por entender lo que se copia y situarlo en el contexto de esta asignatura.

Para acabar, algunos llaman al teorema de conservación de la derivabilidad por convergencia uniforme *teorema de derivación bajo el límite de convergencia uniforme* ¿de dónde habrá salido ese nombre tan horrible? Salud.